Tehtävä

Mitä arvoja integraali $\int_0^1 |x - kx^2| \,\mathrm{d}x$ voi saada, kun $k \in \mathbb{R}$?

Ratkaisu

Oletetaan, että $k \leq 1$. Tuolloin $1 - kx \geq 0$ kun $x \in [0, 1]$, joten

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |x - kx^2| \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 |x||1 - kx| \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x(1 - kx) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x - kx^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{kx^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{k}{3} \\
&\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

joten kyseessä oleva integraali saa ainakin kaikki arvot välillä $[\frac{1}{6}, \infty)$.

Oletetaan nyt, että $k > 1$. Tällöin suora $y = 1 - kx$ leikkaa x-akselin pisteessä x' siten, että $x' \in (0, 1)$. Pisteessä $x = \frac{1}{k}$ yllämainittu suora saavuttaa (ylhäältä) x-akselin, ja "peilautuu" ylöspäin. Toisin sanoen, välillä $[0, \frac{1}{k})$ suora on x-akselin yläpuolella, ja välillä $(\frac{1}{k}, 1]$ sen alapuolella, josta saadaan

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |x - kx^2| \,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{k}} x|1-kx| \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{k}}^1 x|1-kx| \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{k}} x(1-kx) \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{k}}^1 x(kx-1) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{k}} x - kx^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{k}}^1 kx^2 - x \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{kx^3}{3}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{k}} + \left[\frac{kx^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{x=\frac{1}{k}}^1 \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}\right)^2\right) + \left(\frac{k}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{k}{3} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{k}{3} - \frac{1}{2} \\
&= g(k).
\end{aligned}
$$

Seuraavaksi täytyy selvitä funktion g minimiarvo. Derivoidaan ensin:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} g(k) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{k}{3} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\frac{1}{3}k^{-2} + \frac{1}{3} \\
&= -\frac{2}{3}k^{-3} + \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Koska jatkuvan funktion lokaalit minimit ja maksimit ovat mahdollisia vain niissä pisteissä, joissa funktion derivaatta on nolla, selvitetään g:n derivaatan nollakohdat:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} g(k) = 0 &\iff -\frac{2}{3}k^{-3} + \frac{1}{3} = 0 \\
&\iff \frac{2}{3}k^{-3} = \frac{1}{3} \\
&\iff 2k^{-3} = 1 \\
&\iff k^3 = 2 \\
&\iff k = \sqrt[3]{2}.
\end{aligned}
$$

Seuraavaksi on määritettävä derivaatan derivaatta:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(-\frac{2}{3}k^{-3}+\frac{1}{3}\right) &= -\frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}k^{-3}\\ &= -\frac{2}{3}(-3)k^{-4}\\ &= 2k^{-4}.\end{aligned}$$

Koska on oletettu, että $k > 1$, $2k^{-4} > 0$, mistä seuraa, että pisteessä $k = \sqrt[3]{2}$ funktio g saavuttaa minimiarvonsa. Seuraavaksi arvioidaan $g(\sqrt[3]{2})$:

$$\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\Big)^2 + \frac{\sqrt[3]{2}}{3} - \frac{1}{2} \approx 0.12996.$$

Koska $\min(0.12996, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}) = 0.12996$, annettu integraali saa kaikki arvot välillä $[0.12996, \infty)$, kun $k \in \mathbb{R}$.