FUNÇÃO DE WEIERSTRASS

by ARMAND AZONNAHIN

(*Mathematics Department, UFRGS*
Porto Alegre , Brazil)

[Received 25 March 2015. Revise 21 May 2015]

Summary

Definição :

A função de Weierstrass é definida pela seguinte série de Fourier :

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, onde $a \in (0,1)$ e b é um inteiro positivo ímpar tal que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Nova Demonstração do Teorema de Weierstrass :

O nosso objetivo aqui é apresentar uma demonstração do teorema de Weierstrass usando apenas noções relativas às séries de Fourier.

Teorema de Weierstrass :

A função dita de Weierstrass definida por :
$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, onde $b \in (0,1)$ e a é um inteiro positivo ímpar tal que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, é contínua em R e não diferenciável em qualquer ponto.

Demonstração do Teorema de Weierstrass :

Continuidade de W :

Observe que :
$b \in (0,1)$ implica $\sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b} < \infty$.
Isso junto com $sup_{x\in R}|b^n \cos(a^n \pi x)| \leqslant b^n$ nos permite estabelecer , usando o Weierstrass $M - test$, que $\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ converge uniformemente para $W(x)$ em R .

A Continuidade de W vem então da convergência uniforme das séries.

(Definição 2.41 e Teorema 2.59 do livro Harmonic Analysis:From Fourier to Wavelets)

Não Diferenciabilidade de W (em qualquer ponto) :

Aqui, usamos os lemas 3.2 e 3.3 do Capítulo 4 do livro de "Shakarchi"

Quando:
$2N = b^n$, então
$\Delta_{2N}(W) - \Delta_N(W) = b^n \cos(a^n \pi x)$;
Supondo que W é diferenciável em x_0, obtemos o seguinte resultado :
$\Delta_{2N}(W)'(x_0) - \Delta_N(W)'(x_0) = (b^n \cos(a^n \pi x))' = O(\log N)$,
ou seja,
$|(ab)^n sen(a^n(x_0 + h))| = O(\log N)$, onde $|h| \leqslant c/N$.
Para obter a contradição, precisamos apenas escolher $h <$ de modo que:
$|sen(a^n(x_0 + h))| = 1$;
Tomando:
$|h| = |\delta|/a^n$,
onde
$\delta = \pi(k + 1/2) - a^n x_0$,
para algum $k \in Z$, temos:
$|(ab)^n sen(a^n(x_0 + h))| = (ab)^n \to \infty$
quando $n \to \infty$,
pois
$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.
"Contradição",

pois :
$|(ab)^n sen(a^n(x_0 + h))| = O(\log N)$.

Portanto, W não é diferenciável em x_0 .
Como $x_0 \in R$ é arbitrário,
temos que$W$ não é diferenciável em qualquer ponto.

Conclusão :

A função de Weierstrass W é contínua em todos os pontos de
R mas não é diferenciável em qualquer ponto de R.

Referências :

*Harmonic Analysis:from Fourier to Wavelets / María Cristina Pereyra , Lesley A. Ward / ISBN 978-0-8218-7566-7

*Fourier Analysis:An introduction /Shakarchi; pp 116-117